Petre Năchilă

Cătălin Eugen Năchilă

80 DE TESTE DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSUL DE TITULARIZARE

Editura Nomina

Testul 1

Subiectul I

1. **a)** Rezolvați în numere întregi ecuația $x^2 + 2y^2 + 3xy + x + y = 3$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$. Determinați numerele prime $a = n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 8n + 1$.

c) Dacă $1 \leq a < b < c < d$ și $a! \cdot b! \cdot c! \cdot d! = 10!$, determinați numerele naturale a, b, c, d.

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AE \perp CD$, $BF \perp CD$, $E, F \in (CD)$, M, N mijloacele segmentelor (AE), (BF), iar $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Demonstrați că, dacă $O \in MN$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

b) Demonstrați că, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $O \in MN$.

c) Determinați valorile funcțiilor sin și tg pentru unghiurile de 15° și 75°.

Subiectul al II-lea

1. Fie numerele strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, și fie suma:

$$S_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{\sigma(k)}}.$$

a) Determinați permutarea σ, dacă suma $S_n(\sigma)$ este maximă.

b) Determinați permutarea σ, dacă suma $S_n(\sigma)$ este minimă.

c) Fie p și q divizori naturali ai numărului $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Demonstrați că ecuațiile $\sigma^p = e$ și $\sigma^q = e$ au o soluție comună în S_n dacă și numai dacă $(p, q) = 1$.

2. Fie $a > 0$ și fie următoarele șiruri date de termenii generali:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^a}\right)^n, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^a}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+2)^a}\right)^n \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(2n)^a}\right)^n,$$

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{(2n)^a}\right)^n.$$

a) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ pentru $a < 1$.

b) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} c_n$ pentru $a > 1$.

c) Studiați convergența șirului $(b_n)_{n \geq 1}$, pentru $a > 0$.

Testul 2

Subiectul I

1. a) Fie $a, b, c > 0$. Comparați:

$$A = \frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \text{ cu } B = \frac{2}{3} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

b) Fie $a, b, c \in (0, 1)$, cu $a + b + c = 1$. Demonstrați că $C \geq 1$, unde:

$$C = \frac{(a+b)^2}{c+1} + \frac{(b+c)^2}{a+1} + \frac{(c+a)^2}{b+1}.$$

c) Fie $s = a + b + c + d$, cu $a, b, c, d > 0$. Demonstrați că:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+d}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+d}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+d}} > \frac{4(a+b+c)}{s}.$$

2. a) Demonstrați că într-un trapez isoscel dreapta paralelă cu bazele care trece prin intersecția diagonalelor este bisectoarea unghiului făcut de diagonale.

b) Fie trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $\sphericalangle ABC = 60°$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Trapezul are înălțimea $3b$. Determinați perimetrul trapezului.

c) Calculați lungimea segmentului (OC).

Subiectul al II-lea

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și fie matricea $A = \begin{pmatrix} x+y & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & x+y \end{pmatrix}$. Determinați:

a) A^2; **b)** A^3; **c)** A^n.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că:

a) $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 3

Subiectul I

1. a) Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a + b + c = 0$. Demonstrați că:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Demonstrați că:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1.$$

2. Fie paralelogramul $ABCD$, cu $BD = AD$, M mijlocul lui (CD) și $P = \text{sim}_M B$.

a) Demonstrați că $BCPD$ este romb.

b) Demonstrați că punctele A, D, P sunt coliniare.

c) Dacă $\sphericalangle A = 45°$, aflați natura și unghiurile patrulaterului $ABCP$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$.

a) Demonstrați că există o funcție bijectivă $f: \mathbb{C} \to M$.

b) Rezolvați sistemul de ecuații $X + Y = A(3, 3)$; $X^3 + Y^3 = A(-9, 9)$.

c) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a^2 + b^2 < 1$, demonstrați că există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, cu $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

2. a) Fie $\alpha \in [0, 1]$. Determinați $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt[3]{x^{n+1}}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$.

b) Calculați $\int_0^8 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x + \frac{(-1) \cdot x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{(-1)^2 \cdot x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1} \right)$, $x \in [0, 1]$.

Testul 4

Subiectul I

1. a) Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

b) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, avem $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$ dacă și numai dacă $m = n$.

c) Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, dacă $\left[\frac{a^2}{b+c}\right] + \left[\frac{b^2}{a+c}\right] + \left[\frac{c^2}{a+b}\right] = \left[\frac{2}{a+b+c}\right]$.

2. Fie trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, E și F mijloacele laturilor (AD) și (BC). Fie G intersecția bisectoarelor unghiurilor BAD și ADC, iar H intersecția bisectoarelor unghiurilor ABC și BCD. Demonstrați că:

a) punctele E, F, G, H sunt coliniare;

b) $AD = 2 \cdot EG$;

c) $BC = 2 \cdot FH$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și λ_1, λ_2 rădăcinile ecuației $x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A = 0$. Atunci:

a) există șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $x_{n+1} = (\operatorname{tr} A)x_n - (\det A) \cdot x_{n-1}$;

b) dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$, iar dacă $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow x_n = n\lambda_1^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, există $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_2^n C$, iar dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, există $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_1^{n-1} C$.

2. Fie funcția $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$. Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$, $(c_n)_{n\geq 2}$ definite prin $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$, $b_n = a_n - f(n)$, $c_n = a_n - f(n+1)$.

a) Studiați monotonia funcției f.

b) Demonstrați că $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln\big(\ln(k+1) - \ln(\ln k)\big) < \frac{1}{k \ln k}$, $k > 1$.

c) Studiați monotonia șirurilor $(b_n)_n$, $(c_n)_n$.

Testul 5

Subiectul I

1. a) Rezolvați ecuația $\left[\frac{5x-7}{4}\right]+\left[\frac{15x-17}{12}\right]+\left[\frac{15x-13}{12}\right]=\frac{3x+4}{5}$.

b) Rezolvați ecuația $\left[\frac{[x+1]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2]}{3}\right]+\left[\frac{[x+3]}{3}\right]=x+1$.

c) Rezolvați inecuația $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} \leq 1, x \in \mathbb{R}$.

2. Fie trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 3 \cdot CD$, iar înălțimea trapezului egală cu $2 \cdot CD$. Dacă (MN) este linia mijlocie a trapezului, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$, $DE \perp AB$, $E \in AB$, demonstrați că:

a) $AC \perp BD$;

b) AC, DE, MN sunt concurente;

c) $ME \parallel BC$.

Subiectul al II-lea

1. Fie șirul $(F_n)_{n\geq 0}$ definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, și fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrați că:

a) $A^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall\, n \geq 1$;

b) $F_{n+m+1} = F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1}$, $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, m \geq 1$;

c) $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$, $\forall\, n \geq 1$.

2. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$. Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = a_n - f(n)$, $c_n = a_n - f(n+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Studiați monotonia funcției f'.

b) Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}$, $k > 0$.

c) Studiați monotonia șirurilor $(b_n)_n$, $(c_n)_n$.

Testul 6

Subiectul I

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) dacă $[x + a] = [x + b]$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $a = b$;

b) $\{\{a\} + b\} = \{a + \{b\}\}$;

c) Rezolvați în numere naturale ecuația:

$$n-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{12}\right]+\left[\frac{n}{18}\right]=11\cdot\left[\frac{n}{36}\right].$$

2. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și fie punctele $M = \mathrm{sim}_G\, A$, $N = \mathrm{sim}_G\, B$, $P = \mathrm{sim}_G\, C$. Fie p semiperimetrul triunghiului ABC.

a) Demonstrați că $\Delta MNP \equiv \Delta ABC$.

b) Dintre patrulaterele $ABMN$, $BCNP$, $CANP$, care poate fi dreptunghi și care poate fi trapez?

c) Demonstrați că $2p < 3(GM + GN + GP) < 4p$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinați A^2, A^3.

b) Determinați $\det(A^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Generalizare.

2. Fie $a \geq 0$ și fie șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ de integrale definit prin:

$$I_0(a)=\int_0^a \sin' x\,dx,\ I_n(a)=\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}\sin^{(n+1)} x\,dx,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Determinați o formulă de recurență.

b) Demonstrați că pentru orice $a \geq 0$ și orice $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$0 \leq |I_n(a)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

c) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a)$.

Testul 7

Subiectul I

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_n = \left[\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{6n-1}{n+1}\right]$.

a) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $I_n \subset I_{n+1}$.

b) Determinați card A, unde $A = \{I_n \cap \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

c) Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{2x+1}{2}\right] + \left[\dfrac{2^2x+1}{2}\right] + \ldots + \left[\dfrac{2^nx+1}{2}\right] = 2031$.

2. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel CD$, $AD < CB$, $\sphericalangle D = 90°$, $AD = DC$, $BC = AC$, $AF \perp BC$, $F \in (BC)$. Perpendiculara în A pe AB intersectează CD în E, $BE \cap AC = \{M\}$, $BE \cap AF = \{N\}$.

a) Demonstrați că $\Delta ANB \equiv \Delta AME$.

b) Demonstrați că $BC = DA + DE$.

c) Demonstrați că perpendicularele din A pe BE și din E pe AC se intersectează pe BC.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $D = ABC$. Determinați, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, matricele:

a) B^n; **b)** $D^n - AB^nC$; **c)** D^n.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n fixat, $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n)$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \ldots + \dfrac{1}{x-n}$.

a) Demonstrați că funcția g este strict descrescătoare.

b) Demonstrați că pentru orice $x \in A$ avem $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $(f'(x))^2 > f(x) \cdot f''(x)$.

Testul 8

Subiectul I

1. a) Rezolvați în numere reale ecuația:

$$3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}=14.$$

b) Fie $a, b, c \in [0, 1]$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a^2+a}{4+b^3+c^3}+\frac{b^2+b}{4+c^3+b^3}+\frac{c^2+c}{4+a^3+b^3}\le 1.$$

c) Demonstrați că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Fie S_1, S_2, S_3, S_4 ariile triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA. Precizați natura patrulaterului $ABCD$ pentru care:

a) $S_1 = S_3$; **b)** $S_1 = S_3$ și $S_2 = S_4$; **c)** $S_1 = S_2 = S_3$.

Subiectul al II-lea

1. a) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem $aA^3 + bA^2 + cA = O_3$, unde matricea A este $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietățile: există $m, p \in \mathbb{N}^*$, $A^m = B^p = O_n$, $AB = BA$. Demonstrați că există $q \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(A + B)^q = O_n$.

c) Determinați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, pentru matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)$, $g(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k}$.

a) Determinați numărul asimptotelor graficului funcției g.

b) Calculați $\int_{n+1}^{n+2}\left(g(x+1)-g(x)\right)dx$.

c) Determinați numărul soluțiilor reale distincte ale ecuației $f(x) - af'(x) = 0$ pentru $a \in \mathbb{R}$.

Testul 9

Subiectul I

1. Fie $E(x, y, z) = \left(\sqrt{1-xy}+\sqrt{1-yz}+\sqrt{1-xz}\right)\left(\frac{\sqrt{1-xy}}{1-xy}+\frac{\sqrt{1-yz}}{1-yz}+\frac{\sqrt{1-xz}}{1-xz}\right)$,

unde $x, y, z \in (0, 1)$.

a) Demonstrați că $E(x, y, z) \geq 9$.

b) Dacă $x + y + z = 1$, demonstrați că $E(x, y, z) \geq \frac{81xyz}{xy+yz+zx}$.

c) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $\min(a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2) \leq \frac{1}{4}$.

2. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC, anume (AD), (BE), (CF). Demonstrați că:

a) $\frac{IA}{AD}+\frac{IB}{BE}+\frac{IC}{CF}=2$; **b)** $\frac{ID}{AD}+\frac{IE}{BE}+\frac{IC}{CF}=1$; **c)** $\frac{IA}{ID}+\frac{IB}{IE}+\frac{IC}{IF}\geq 6$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) \in G$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $X(a) \cdot X(\alpha) = I_2$.

c) Calculați $\left(X\left(\frac{5}{3}\right)\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă în $x = 0$, cu $f(0) = 1$ și $f(x) = x + f\left(\frac{x}{e}\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x \cdot e^{-n-1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $f\left(\frac{x}{e^n}\right) - f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = \frac{x}{e^n}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Determinați funcția f.